UENDELIG, MERE UENDELIG, ENDNU MERE UENDELIG, . . .

ESBEN BISTRUP HALVORSEN

1. Indledning

De fleste kan nok blive enige om, at mængden $\{a, b, c\}$ er større end mængden $\{d\}$. Den ene indeholder jo tre elementer, medens den anden kun indeholder et element, og tre er som bekendt større end en. Betragter vi i stedet mængden $\mathbb{Q}$ af rationale tal og mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal, er det ikke længere helt klart, om den ene er større end den anden. På den ene side må $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$ være lige store, eftersom de begge indeholder uendeligt mange elementer, og på den anden side må $\mathbb{R}$ være større end $\mathbb{Q}$, eftersom $\mathbb{Q}$ er en ægte delmængde af $\mathbb{R}$.

Problemet med uendelige mængder er, at vi ikke kan være sikre på at kunne "tælle" elementerne i dem på nogen fornuftig måde. Hvordan skulle man f.eks. tælle elementerne i $\mathbb{R}$? Før man overhovedet kan svare på dette spørgsmål, må man overveje, hvad det overhovedet betyder at tælle elementer i en mængde. Når vi tæller elementerne i $\{a, b, c\}$, benævner vi hvert af elementerne a, b, c med et entydigt bestemt tal fra mængden $\{1, 2, 3\}$. F.eks. kunne vi kalde a for "1", b for "2" og c for "3". Vi kunne også have kaldt a for "2", b for "1" og c for "3" uden at det havde ændret på vores konklusion om, at mængden indeholder tre elementer. Det eneste vigtige er, at der *findes* en parring af elementerne i $\{a, b, c\}$ med elementerne i $\{1, 2, 3\}$; de mængder, hvis elementer kan parres med elementerne fra $\{1, 2, 3\}$, er netop de mængder, der indeholder tre elementer. Den matematiske betegnelse for sådan en parring er *bijektion* (se Definition 2.1 og Bemærkning 2.3).

Når vi beskæftiger os med uendelige mængder som f.eks. $\mathbb{R}$, findes der ingen bijektion med mængder på formen $\{1, 2, \dots, n\}$; det er netop det, der ligger i ordet "uendelig". Næste naturlige skridt er at forsøge at finde en bijektion med mængden $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, men ikke engang her kan vi være sikre på at få succes: Faktisk kan man vise (se Sætning 3.12), at der slet ikke findes nogen bijektion mellem $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$! Til gengæld kan man godt finde en bijektion mellem $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Q}$ (se Eksempel 3.7). Dette leder os til at konkludere, at $\mathbb{R}$ er større end $\mathbb{N}$, medens $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Q}$ er lige store, hvormed $\mathbb{R}$ også må være større end $\mathbb{Q}$.

I eksemplerne med $\{a, b, c\}$, $\{d\}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ har vi kunne afgøre hvilke mængder, der var størst, ved at sammenligne med $\mathbb{N}$ eller mængder på formen $\{1, 2, \dots, n\}$. Givet vilkårlige mængder X og Y, hvis størrelser vi ønsker at sammenligne, kan vi dog ikke altid være sikre på at kunne benytte denne fremgangsmåde: Det kunne jo tænkes, at X og Y begge er større end $\mathbb{N}$, og så er vi lige vidt. Løsningen på dette problem er at

Dette notesæt er udarbejdet til HCØ-dagene 11.-12. oktober 2004 og kan findes på hjemmesiden `http://www.math.ku.dk/~ebh/`. Notesættet bygger i overvejende grad på Henrik Holms *Lidt om uendelighed*, som ligeledes kan findes på førnævnte hjemmeside.

gå helt uden om mængderne $\mathbb{N}$ og $\{1, 2, \ldots, n\}$ og simpelthen sammenligne X og Y direkte: Hvis der findes en bijektion mellem X og Y, konkluderer vi, at X og Y er lige store; hvis der ikke findes nogen bijektion, må der enten findes en bijektion mellem X og en delmængde af Y eller mellem Y og en delmængde af X (se Sætning 3.3(c)), og i første tilfælde kan vi konkludere, at Y er større end X, medens vi i andet tilfælde konkluderer, at X er større end Y.

Idéen med at benytte bijektioner til at sammenligne mængder blev indført af Georg Cantor omkring 1870. Efter ovenstående diskussion forekommer bijektioner måske at være et naturligt og intuitivt fornuftigt redskab til sammenligning af mængder, men da Cantor præsenterede sin idé, var den nærmest revolutionerende. En af grundene hertil er de mange anti-intuitive konsekvenser, f.eks. at der findes ikke blot flere, men faktisk *uendeligt* mange slags uendelighed (se Bemærkning 3.11). Idéerne mødte da også stor modstand, da de kom frem, hvilket muligvis var medvirkende til Cantors svære depressioner og, i sidste ende, nervesammenbrud. I vore dage er Cantors idéer en fuldstændig indgroet del af matematikken, og de uendeligt mange slags uendelighed accepteres blot som en af de mange spændende (og måske endda charmerende) konsekvenser af selve begrebet "uendelig".

2. Afbildninger

Det forudsættes, at læseren er bekendt med begrebet *afbildning* (også kaldet *funktion*). Hvis f er en afbildning fra en mængde X til en mængde Y, skrives dette $f\colon X \to Y$. Mængden X kaldes *definitionsmængden* for f, medens mængden Y kaldes *dispositionsmængden* for f.

(2.1) **Definition.** En afbildning $f\colon X \to Y$ kaldes

(a) *injektiv*, hvis der for alle elementer $x_1, x_2 \in X$ gælder implikationen
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2;$$
(b) *surjektiv*, hvis der til ethvert $y \in Y$ findes et $x \in X$ med $f(x) = y$; og
(c) *bijektiv*, hvis den både er injektiv og surjektiv.

(2.2) **Bemærkning.** For en afbildning $f\colon X \to Y$ noterer vi følgende egenskaber.

(a) At f er injektiv betyder, at der til hvert element $y \in Y$ findes *højst* et element $x \in X$ således at $f(x) = y$.
(b) At f er surjektiv betyder, at der til hvert element $y \in Y$ findes *mindst* et element $x \in X$ således at $f(x) = y$.
(c) Hvis f er bijektiv gælder altså, at der til hvert element $y \in Y$ findes *præcis* et element $x \in X$ opfyldende $f(x) = y$.

(2.3) **Bemærkning.** Afbildningen $f\colon X \to Y$ er bijektiv, hvis og kun hvis den har en *invers afbildning*, dvs. en afbildning $g\colon Y \to X$ med
$$(g \circ f)(x) = x \qquad \text{og} \qquad (f \circ g)(y) = y$$

for alle $x \in X$ og $y \in Y$. Når f er bijektiv, betegnes den inverse afbildning med f^{-1}. Den er defineret ved for $y \in Y$ at fastsætte $f^{-1}(y) = x$, hvor x er det entydigt bestemte element i X med egenskaben $f(x) = y$. Bemærk, at $f^{-1}\colon Y \to X$ også er bijektiv. En bijektiv afbildning $X \to Y$ kaldes også en *bijektion* mellem X og Y.

(2.4) **Eksempel.** Injektivitet, surjektivitet og bijektivitet af en funktion afhænger ikke blot af funktionens forskrift, men også af funktionens definitions- og dispositionsmængde. Dette understreges af følgende fire eksempler på funktioner med samme forskrift.

(a) Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^2 + 1$ er hverken injektiv eller surjektiv. Injektiviteten fejler, idet f.eks. $f(-1) = f(1)$, og surjektiviteten fejler, idet f.eks. $f(x) \neq -42$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Funktionen $g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ defineret ved $g(x) = x^2 + 1$ er injektiv, men ikke surjektiv. Injektiviteten følger af, at hvis $g(x_1) = g(x_2)$, så må

$$x_1 = \sqrt{g(x_1) - 1} = \sqrt{g(x_2) - 1} = x_2,$$

medens surjektiviteten fejler af samme grund som i (a).

(c) Funktionen $h\colon \mathbb{R} \to [1, \infty[$ defineret ved $h(x) = x^2 + 1$ er surjektiv, men ikke injektiv. Injektiviteten fejler af samme grund som i (a), medens surjektiviten følger af, at der for alle $y \in [1, \infty[$ gælder $f(\sqrt{y-1}) = y$.

(d) Funktionen $i\colon [0, \infty[\to [1, \infty[$ defineret ved $i(x) = x^2+1$ er bijektiv. Injektivitet følger på samme måde som i (b), medens surjektivitet følger på samme måde som i (c). Den inverse afbildning $i^{-1}\colon [1, \infty[\to [0, \infty[$ (jvf. Bemærkning 2.3) er defineret ved $i^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$.

3. Kardinalitet

(3.1) **Definition.** For mængder X og Y defineres følgende.

(a) Vi siger, at X har mindre *kardinalitet* end Y, hvis der findes en injektiv afbildning $f\colon X \to Y$. I denne situation skrives $X \preceq Y$.

(b) Vi siger, at X har samme kardinalitet som Y, hvis der findes en bijektiv afbildning $f\colon X \to Y$. Vi udtrykker også dette ved at sige, at X og Y er *ækvipotente*. I denne situation skrives $X \approx Y$.

(c) Vi skriver $X \prec Y$, hvis der gælder $X \preceq Y$ og der *ikke* gælder $X \approx Y$.

(3.2) **Bemærkning.** Tegn som "$\approx$" og "$\preceq$", der beskriver en sammenhæng mellem objekter (i dette tilfælde mængder), kaldes *relationer*. Når vi kun interesserer os for mængders størrelser (altså kardinalitet), kan vi betragte "$\approx$" som et lighedstegn og "$\preceq$" som et ulighedstegn. Fra et kardinalitetsmæssigt synspunkt er mængderne X og Y altså identiske, hvis bare $X \approx Y$. Tilsvarende er X mindre end eller lig Y, hvis bare $X \preceq Y$. At "$\approx$" og "$\preceq$" virkelig besidder de fundamentale egenskaber, som lighedstegn og ulighedstegn bør, ses af følgende sætning.

(3.3) **Sætning.** *Lad X, Y, Z og W betegne mængder. Relationerne $\approx$ og $\preceq$ har da følgende fundamentale egenskaber.*

(a) *Der gælder altid* $X \approx X$.
(b) *Hvis* $X \approx Y$, $Z \approx W$ *og* $X \preceq Z$, *da vil* $Y \preceq W$.
(c) *Der gælder* $X \preceq Y$ *eller* $Y \preceq X$.
(d) *Hvis* $X \approx Y$ *og* $Y \approx Z$, *da vil* $X \approx Z$.
(e) *Hvis* $X \approx Y$, *da vil også* $Y \approx X$ *samt* $X \preceq Y$ *og* $Y \preceq X$.
(f) *Hvis* $X \preceq Y$ *og* $Y \preceq Z$, *da vil* $X \preceq Z$.
(g) *Hvis* $X \preceq Y$ *og* $Y \preceq X$, *da vil* $X \approx Y$.

Bevis. Se Opgave 4.2. □

(3.4) **Bemærkning.** Med vores nye sprogbrug kan vi nu definere, hvad det vil sige, at en mængde er endelig: En mængde er endelig, hvis den er ækvipotent med $\emptyset$ eller $\{1, \ldots, n\}$ for et $n \in \mathbb{N}$. En mængde siges selvfølgelig at være *uendelig*, hvis den ikke er endelig. Man kan vise, at en mængde X er uendelig, hvis og kun hvis $\mathbb{N} \preceq X$. Hvis der rent faktisk gælder $X \approx \mathbb{N}$, siger vi, at X er *tælleligt uendelig*.

(3.5) **Eksempel.** Mængderne $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$ er ækvipotente. Dette ses ved at betragte den bijektive afbildning $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{hvis} \quad n > 0 \\ -2n+1 & \text{hvis} \quad n \leq 0 \end{cases}$$

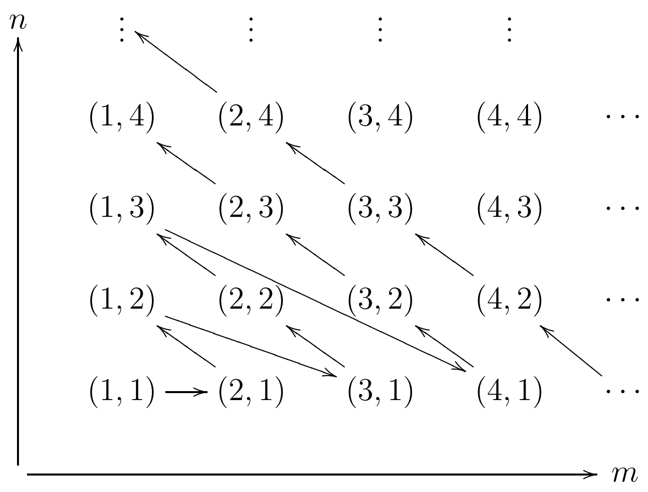
Afbildningen illustreres af følgende figur.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{Z} & = & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & & \big\downarrow & \big\downarrow & \big\downarrow & \big\downarrow & \big\downarrow & \big\downarrow & \big\downarrow & \\ \mathbb{N} & = & \cdots & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & \cdots \end{array}$$

(3.6) **Eksempel.** Mængderne $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ og $\mathbb{N}$ er ækvipotente. Dette ses ved at betragte den bijektive afbildning $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, defineret ved

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + n.$$

Afbildningen illustreres af følgende figur.



(3.7) **Eksempel.** Mængderne $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{N}$ er ækvipotente. Den kønneste måde at vise dette på er nok ved at benytte Sætning 3.3(f) (også kendt som *Bernsteins ækvivalenssætning*), dvs. ved at vise både $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$ og $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$.

Idet $\mathbb{N}$ er en delmængde af $\mathbb{Q}$, gælder selvfølgelig $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$. For at vise det omvendte, altså at $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$, bemærkes at ethvert rationalt tal $x \in \mathbb{Q}$ på entydig måde kan fremstilles som brøk

$$(\dagger) \qquad x = \frac{p}{q}\,, \quad \text{hvor } p \in \mathbb{Z} \text{ og } q \in \mathbb{N} \text{ er primiske.}$$

At p og q er *primiske* betyder, at den største fælles divisor for p og q er lig 1. Vi kan derfor definere en afbildning $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ved

$$f(x) = (p, q), \quad \text{når } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ er givet ved } (\dagger).$$

Det er klart, at f er injektiv, og derfor vil $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Af Eksempel 3.5 følger, at $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, og af Eksempel 3.6 følger, at $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. Dermed fås[1]

$$\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \;\approx\; \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\approx\; \mathbb{N},$$

dvs. $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$ ifølge Sætning 3.3 som ønsket.

(3.8) **Bemærkning.** I eksemplerne ovenfor har vi set, at mængderne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ er ækvipotente, dvs. er "lige store", selvom mængderne er ægte delmængder af hinanden. På baggrund af dette kunne man måske fristes til at tro, at alle uendelige mængder er ækvipotente, og at der dermed kun findes en slags uendelighed. At dette er langt fra tilfældet følger af Sætning 3.10 nedenfor.

(3.9) **Definition.** Lad X være en mængde. Da defineres *potensmængden* $\mathcal{P}(X)$ som mængden af alle delmængder af X, altså $\mathcal{P}(X) \;=\; \big\{A \,\big|\, A \subseteq X\big\}$.

(3.10) **Sætning.** *For enhver mængde X gælder $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Bevis. Afbildningen $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ defineret ved $f(x) = \{x\}$ er oplagt injektiv, hvilket viser $X \preceq \mathcal{P}(X)$. Antag nu, i håb om at opnå en modstrid, at der findes en bijektion $g\colon X \to \mathcal{P}(X)$, og definer

$$A \;=\; \big\{x \in X \,\big|\, x \notin g(x)\big\} \;\in\; \mathcal{P}(X).$$

Da g specielt er surjektiv, findes $a \in X$ så $g(a) = A$, og pr. definition gælder så, at

$$a \in A \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \notin g(a) = A,$$

hvilket er en modstrid. □

[1]Dette kræver faktisk et lille argument. Generelt gælder der for mængder X, Y og Z med $X \approx Y$, at $X \times Z \approx Y \times Z$. Dette vises ganske let (prøv selv!), men husk nu på, at $X \approx Y$ fra et kardinalitetesmæssigt synspunkt betyder, at X og Y er identiske, hvormed påstanden (intuitivt set) er triviel.

(3.11) **Bemærkning.** Af ovenstående sætning følger, at der faktisk må være uendeligt mange slags uendelighed! Sætningen giver nemlig, at der f.eks. må gælde

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \cdots,$$

dvs. $\mathbb{N}$ er uendelig, men $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ er *mere* uendelig, og $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ er *endnu mere* uendelig osv.

I 1874 viste Cantor som den første nogensinde, at der er "flere" reelle tal end naturlige tal. Vi præsenterer her beviset, der nu kendes som *Cantors diagonalargument.*

(3.12) **Sætning.** *Der gælder* $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Bevis. Idet $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gælder selvfølgelig $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$. Betragt nu mængden $D \subseteq \mathbb{R}$ bestående af alle reelle tal x, hvis heltalsdel er nul, og hvis decimalbrøksfremstilling udelukkende består af 0'er og 1'er, dvs. x har formen

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \cdots, \quad \text{hvor } d_1, d_2, d_3, \ldots \in \{0, 1\}.$$

Naturligvis er $D \preceq \mathbb{R}$, så det er tilstrækkeligt at vise $\mathbb{N} \prec D$. Afbildningen $h \colon \mathbb{N} \to D$ defineret ved

$$h(n) = 0, \underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ 1'er}} 000 \cdots$$

er oplagt injektiv, og derfor vil $\mathbb{N} \preceq D$. Antag nu, i håb om at opnå en modstrid, at $\mathbb{N} \approx D$, dvs. at der findes en bijektiv afbildning $f \colon \mathbb{N} \to D$. Da f specielt er surjektiv, må samtlige elementer i D optræde i listen nedenfor.

$$\begin{array}{ccl}
f(1) & = & 0, d_1^{(1)} d_2^{(1)} d_3^{(1)} \cdots d_n^{(1)} d_{n+1}^{(1)} \cdots \\
f(2) & = & 0, d_1^{(2)} d_2^{(2)} d_3^{(2)} \cdots d_n^{(n)} d_{n+1}^{(n)} \cdots \\
\vdots & & \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
f(n) & = & 0, d_1^{(n)} d_2^{(n)} d_3^{(n)} \cdots d_n^{(n)} d_{n+1}^{(n)} \cdots \\
\vdots & & \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{array}$$

Betragt herefter elementet $y = 0, q_1 q_2 q_3 \cdots \in D$, hvor

$$q_n = 1 - d_n^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{hvis } d_n^{(n)} = 1, \\ 1, & \text{hvis } d_n^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Pr. konstruktion er $y \neq f(n)$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ (thi y og $f(n)$ afviger på n'te decimal), hvilket strider mod at $y \in D$. □

(3.13) **Bemærkning.** Man kan faktisk vise, at $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$, så derfor er Sætning 3.12 et specialtilfælde af Sætning 3.10. Beviset for sidstnævnte sætning er da også en variation af Cantors diagonalargument.

4. OPGAVER

(4.1) **Opgave.** Afgør hvilke af følgende funktioner, der er injektive hhv. surjektive hhv. bijektive.

(a) $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = 1/x$;
(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $g(x) = x^3 + 1$;
(c) $h\colon [0, \pi] \to [-2, 2]$ defineret ved $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

(4.2) **Opgave.** De fleste af egenskaberne i Sætning 3.3 er lette at vise, men to af dem er svære. Hvilke? Vis et par af de lette.

(4.3) **Opgave.** Vis, at der gælder

(a) $]0, 1[\, \approx \,]a, b[$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$;
(b) $]0, 1[\, \approx \,]0, \infty[$ (*vink*: Betragt en funktion med forskriften $1/x - 1$);
(c) $]0, 1[\, \approx \mathbb{R}$ (*vink*: Betragt eksponentialfunktionen og benyt (b)).

(4.4) **Opgave (Hilberts Hotel).** Følgende tre opgaver omhandler alle det berømte "Hilberts Hotel", der er opkaldt efter matematikeren David Hilbert. Hotellets værelser er nummererede: Værelse 1, værelse 2, værelse 3 osv. Der er altså uendeligt mange værelser![2]

(a) **(For begyndere)** En mørk og stormfuld aften ankommer en træt rejsende til Hilberts Hotel. Alle værelser er optaget. Hvordan kan hotellets receptionist skaffe plads, så også den rejsende får et værelse?

(b) **(Mellemniveau)** En forskrækkelig uvejrsnat nedbrænder det konkurrerende hotel, Klamhuggernes Hotel, som er en tro kopi af Hilberts Hotel og som denne er aften er fuldt belagt. Alle gæster undslipper branden og beder om husly på Hilberts Hotel, hvor alle værelser som sædvanlig er optaget. Hvordan kan den kløgtige receptionist klare situationen, således at alle får et værelse?

(c) **(Galakseversionen)** Det fuldt udbyggede univers består af uendeligt mange galakser, der hver indeholder uendeligt mange stjerner. Omkring hver stjerne kredser uendeligt mange planeter, og på hver planet er der uendeligt mange byer, hver med uendeligt mange gader. Naturligvis er der uendeligt mange huse i hver gade, og hvert hus har uendeligt mange etager, der alle har uendeligt mange værelser. I hvert eneste værelse bor et menneske.

Opbygningen af universet er sket i rasende fart efter supermoderne, men måske ikke så holdbare, principper. Udviklingen er dog gået let henover Hilberts Hotel, som stadig ligger der, uændret, for enden af en af gaderne i en af byerne på en af planeterne, hørende til en af stjernene i en af galakserne. Og som altid er alle værelser optaget på det populære hotel.

[2] Formuleringen af denne opgave er hentet direkte fra Flemming Topsøes *Introduktion til abstrakt matematik*, som kan findes på `http://www.math.ku.dk/noter/`.

Så indtræffer katastrofen. Ragnarok! Alt, hvad der er bygget op i hast, braser sammen. Det eneste, der modstår ødelæggelsen er gode gamle Hilberts Hotel. På forunderlig vis slipper alle ud af de nedstyrtede huse. De ved, at der kun er een mulighed for redning: Hilberts Hotel! Alle begiver sig dertil, nogle til fods og andre i (uendeligt) hurtige rumskibe.

Problemet er nu, om den snarrådige receptionist på Hilberts Hotel også kan klare denne situation, således at alle får husly og dermed undslipper Ragnarok. Hvis "uendelig" overalt i ovenstående betyder "tælleligt uendelig", så kan han! Men hvordan?

Esben Bistrup Halvorsen, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, Universitetsparken 5, 2100 København Ø, Tlf. 3532 0709, E–mail: esben@math.ku.dk.