LIDT OM UENDELIGHED

HENRIK HOLM

Denne note omhandler uendelighedsbegrebet, som det er indført af Georg Cantor omkring 1870. Vi henviser til [4] for Cantors arbejder.

For datiden var Cantors idéer revolutionerende, og de mødte stor modstand fra Leopold Kronecker. Denne modstand var muligvis medvirkende til Cantors nervesammenbrud og depressioner. Julius Dedekind og David Hilbert støttede dog Cantors teorier.

Blandt de elementære danske introduktioner til emnet finder man [16] og [17]. Lidt mere avancerede er fremstillingerne [1, Kapitel 1], [2], [15] og [19]. Sidstnævnte indholder mange øvelser, og kan varmt anbefales.

1. Afbildninger

Det forudsættes, at læseren er bekendt med definitionen af en afbildning (funktion) $f\colon X \to Y$ mellem to mængder X og Y. Man omtaler X som *definitionsmængden* for f, medens Y kaldes *dispositionsmængden* for f.

Før vi kan tale om uendelighedsbegrebet, bliver vi nødt til at introducere lidt notation for afbildninger, som gjort nedenfor.

(1.1) **Definition.** En afbildning $f\colon X \to Y$ kaldes:

(a) *injektiv*, hvis der for alle elementer $x_1, x_2 \in X$ gælder implikationen:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

(b) *surjektiv*, hvis der til ethvert $y \in Y$ findes et $x \in X$ med $f(x) = y$.

(c) *bijektiv*, hvis den både er injektiv og surjektiv.

(1.2) **Bemærkning.** For en afbildning $f\colon X \to Y$ noterer vi følgende egenskaber:

(1) At f er injektiv betyder, at der til hvert element $y \in Y$ findes *højst* et element $x \in X$ således at $f(x) = y$.

(2) At f er surjektiv betyder, at der til hvert element $y \in Y$ findes *mindst* et element $x \in X$ således at $f(x) = y$.

(3) Hvis f er bijektiv gælder altså, at der til hvert element $y \in Y$ findes *præcis* et element $x \in X$ opfyldende $f(x) = y$.

Udarbejdet i forbindelse med HCØ–dagene 13. og 14. oktober 2003.

(1.3) **Invers afbildning.** I det tilfælde at en afbildning $f\colon X \to Y$ er bijektiv kan vi definere den *inverse afbildning* $f^{-1}\colon Y \to X$ ved for $y \in Y$ at fastsætte $f^{-1}(y) = x$, hvor x er det entydigt bestemte element i X med egenskaben $f(x) = y$.

Bemærk at $f^{-1}\colon Y \to X$ også er bijektiv, og at der gælder identiteterne:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \text{og} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y,$$

for alle $x \in X$ og $y \in Y$. Opgave (5.1) viser, at der også gælder det omvendte: hvis der findes en afbildning $g\colon Y \to X$ med egenskaberne

$$(g \circ f)(x) = x \qquad \text{og} \qquad (f \circ g)(y) = y,$$

for alle $x \in X$ og $y \in Y$, da er f bijektiv og $f^{-1} = g$.

(1.4) **Eksempel.** Konkrete eksempler kendes allerede fra gymnasiet:

(a) Betragt funktionen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = \sqrt{x}$ for $x \in [0,\infty[$.

Da er f injektiv, thi hvis $x_1, x_2 \in [0,\infty[$ med $f(x_1) = f(x_2)$, altså $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$, da vil også $x_1 = (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 = x_2$.

Derimod er f ikke surjektiv, fordi til fx $y = -1 \in \mathbb{R}$ findes intet $x \in [0,\infty[$ som opfylder $f(x) = y$.

(b) Betragt funktionen $g\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ defineret ved $g(x) = \cos x$ for $x \in \mathbb{R}$.

Da er g ikke injektiv, thi fx er $x_1 = 0$ og $x_2 = 2\pi$ forskellige elementer i $\mathbb{R}$, men alligevel er $g(x_1) = \cos 0 = 1 = \cos 2\pi = g(x_2)$.

Dog er det velkendt, at g er surjektiv (dette ses nok lettest ved at bemærke, at cos er kontinuert med $\cos 0 = 1$ og $\cos \pi = -1$).

(c) Funktionen $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $h(x) = x^3 + 1$ for $x \in \mathbb{R}$ er bijektiv, og den inverse funktion $h^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved $h^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$ for $y \in \mathbb{R}$.

2. Uendelighedsbegrebet

Vi begynder med Cantors helt centrale definitioner:

(2.1) **Definition (Cantor, omkring 1870).** For mængder X og Y defineres:

(a) Vi siger at X har mindre *mægtighed*, eller *kardinalitet*, end Y hvis der findes en injektiv afbildning $f\colon X \to Y$. I denne situation skrives $X \preceq Y$.

(b) Vi siger at X har samme mægtighed, eller kardinalitet, som Y hvis der findes en bijektiv afbildning $f\colon X \to Y$. Vi udtrykker også dette ved at sige, at X og Y er *ækvipotente*. I denne situation skrives $X \approx Y$.

(c) Vi skriver $X \prec Y$ hvis der gælder $X \preceq Y$ og der *ikke* gælder $X \approx Y$.

(2.2) **Definition.** En mængde X siges at være *uendelig* hvis $\mathbb{N} \preceq X$.

(2.3) **Eksempel.** Mængderne $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$ er ækvipotente. Dette ses ved at betragte den bijektive afbildning $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, defineret ved:

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{hvis} \quad n > 0 \\ -2n+1 & \text{hvis} \quad n \leqslant 0 \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

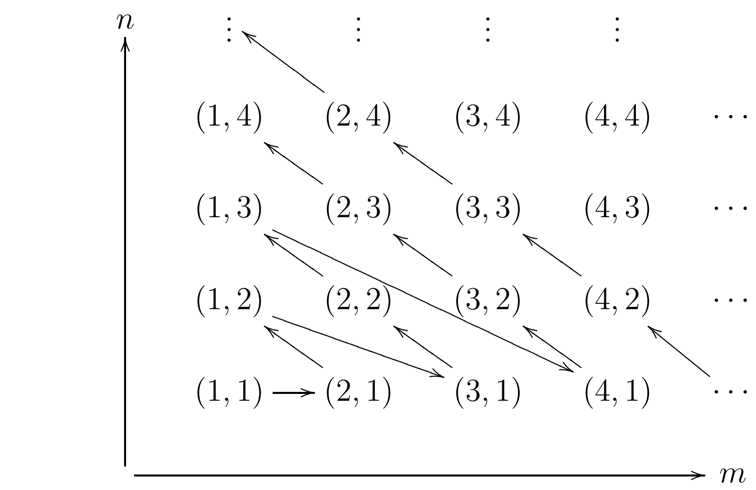
Afbildningen illustreres af figuren:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \mathbb{Z} & = & \cdots & , & -3 & , & -2 & , & -1 & , & 0 & , & +1 & , & +2 & , & +3 & , & \cdots \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ \mathbb{N} & = & \cdots & , & 7 & , & 5 & , & 3 & , & 1 & , & 2 & , & 4 & , & 6 & , & \cdots \end{array}$$

(2.4) **Eksempel.** Mængderne $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ og $\mathbb{N}$ er ækvipotente. Dette ses ved at betragte den bijektive afbildning $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, defineret ved:

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n \quad , \quad (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Afbildningen illustreres af figuren:



(2.5) **Eksempel.** Mængderne $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{N}$ er ækvipotente. Det kønneste er nok at benytte Bernsteins ækvivalenssætning (2.8) nedenfor, dvs. ved at vise både $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$ og $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$.

Idet $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ er selvfølgelig $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$. For at vise det omvendte $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$ bemærkes, at ethvert rationalt tal $x \in \mathbb{Q}$ på entydig måde kan fremstilles som brøk:

$$(\dagger) \qquad x = \frac{p}{q} \quad , \quad \text{hvor} \;\; p \in \mathbb{Z} \;\; \text{og} \;\; q \in \mathbb{N} \;\; \text{er primiske.}$$

At p og q er *primiske* betyder, at den største fælles divisor for p og q er lig 1. Vi kan derfor definere en afbildning $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ved

$$f(x) = (p,q) \quad , \quad \text{når} \;\; x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \;\; \text{er givet ved } (\dagger).$$

Det er klart, at f er injektiv, og derfor vil $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Af Eksempel (2.3) følger at $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, og dermed giver Opgave (5.5) samt Eksempel (2.4) at

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}.$$

Derfor viser Sætning (2.7) at $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$, som ønsket.

I 1874 viser Cantor [3], som den første, at der er "flere" reelle tal end naturlige tal. Vi giver her det bevis, der nu kendes som *Cantors diagonalargument*.

(2.6) **Sætning (Cantors diagonalargument).** *Der gælder* $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Bevis. Idet $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gælder selvfølgelig $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$. Betragt nu mængden $D \subseteq \mathbb{R}$ bestående af alle reelle tal x hvis heltalsdel er nul, og hvis decimalbrøksfremstilling udelukkende består af 0'er og 1'er, dvs. x har formen

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \cdots \qquad \text{hvor} \qquad d_1, d_2, d_3, \ldots \in \{0, 1\}.$$

Naturligvis er $D \preceq \mathbb{R}$, så ifølge Opgave (5.7) er det tilstrækkeligt at vise $\mathbb{N} \prec D$. Afbildningen $h \colon \mathbb{N} \to D$ defineret ved

$$h(n) \;=\; 0, \underbrace{11 \cdots 1}_{n \;\; 1\text{'er}} 000 \cdots$$

er oplagt injektiv, og derfor vil $\mathbb{N} \preceq D$. Antag nu, for modstrid, at $\mathbb{N} \approx D$, dvs. der findes en bijektiv afbildning $f \colon \mathbb{N} \to D$. Sæt nu

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & = & f(1) & = & 0, d_1^{(1)} d_2^{(1)} d_3^{(1)} \cdots d_n^{(1)} d_{n+1}^{(1)} \cdots \\ x_2 & = & f(2) & = & 0, d_1^{(2)} d_2^{(2)} d_3^{(2)} \cdots d_n^{(2)} d_{n+1}^{(2)} \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & f(n) & = & 0, d_1^{(n)} d_2^{(n)} d_3^{(n)} \cdots d_n^{(n)} d_{n+1}^{(n)} \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

hvilket udgør samtlige elementer i D, da f specielt er surjektiv. Betragt herefter elementet $y = 0, q_1 q_2 q_3 \cdots \in D$ defineret ved

$$q_n \;=\; 1 - d_n^{(n)} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad d_n^{(n)} = 1 \\ 1 & \text{hvis} \quad d_n^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Pr. konstruktion er $y \neq x_n$ (thi de afviger på n^{te} decimal) for ethvert $n \in \mathbb{N}$, hvilket strider mod at $y \in D$. $\square$

(2.7) **Sætning.** *Lad X, Y og Z være vilkårlige mængder. Relationerne $\approx$ og $\preceq$ har da følgende fundamentale egenskaber:*

(1) *Der gælder altid $X \approx X$.*
(2) *Hvis $X \approx Y$, da vil også $Y \approx X$ samt $X \preceq Y$ og $Y \preceq X$.*
(3) *Hvis $X \approx Y$ og $Y \approx Z$, da vil $X \approx Z$.*
(4) *Hvis $X \preceq Y$ og $Y \preceq Z$, da vil $X \preceq Z$.*

Bevis. Dette er indholdet af Opgave (5.6). $\square$

Blandt de mere avancerede egenskaber hører det næste resultat, der i 1897 blev vist af Felix Bernstein, og nu går under navnet *Bernsteins ækvivalenssætning.*

Beviset for sætningen, samt sætningens lidt indviklede historie, findes i M. Frewers artikel [9], der er en hyldest til Bernstein i anledning af 100-års dagen for hans fødsel. Beviset læses dog nok nemmere i fx [1, Sætning 2.3] eller [15, Sætning 15.VII].

(2.8) **Bernsteins ækvivalenssætning (1897).** Hvis X og Y er mængder opfyldende både $X \preceq Y$ og $Y \preceq X$, da vil $X \approx Y$. $\square$

(2.9) **Potensmængde.** Lad X være en mængde. Da defineres potensmængden $\mathcal{P}(X)$ som mængden af alle delmængder af X, altså $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

(2.10) **Sætning.** *For enhver mængde X gælder $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Bevis. Afbildningen $X \to \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ er oplagt injektiv, hvilket viser $X \preceq \mathcal{P}(X)$. Antag nu, for modstrid, at der findes en bijektion $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$, og definer da

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Da f specielt er surjektiv findes $a \in X$ så $f(a) = A$, og pr. definition gælder så:

$$a \in A \quad \iff \quad a \notin f(a) = A,$$

hvilket er en modstrid. $\square$

(2.11) **Bemærkning.** Man kan faktisk vise at $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$, så derfor er Sætning (2.6) et specialtilfælde af Sætning (2.10). Beviset for sidstnævnte sætning er da også en variation af Cantors diagonalargument.

3. Aksiomer

Før vi kan gå ordentligt videre, er det nødvendigt med en kort introduktion til matematikkens grundlag.

(3.1) **Aksiomer.** Et *aksiom*, eller et *postulat*, er kort fortalt et udsagn, som antages at være "sandt", og derfor kan/skal et aksioms gyldighed ikke bevises. Aksiomer er altså en slags matematiske fundamentalsætninger, der fungerer som grundlag når man, ud fra disse, skal bevise andre sætninger.

De fleste har sikkert hørt om den græske matematiker Euklid (ca. 300 fvt.) i forbindelse med geometri. Hans berømte *parallel-postulat* [7, bog I, p. 4, Postulat 5] er et godt eksempel på et aksiom fra hans samtids matematik.

(3.2) **ZFC er matematikkens grundlag.** I 1908 opstillede Ernst Zermelo [21], med senere bidrag fra Adolf Fraenkel [8] i 1922, et system af aksiomer, der nu betegnes ZF. Dette system har vist sig at være yderst tilfredstillende i den forstand, at meget af den matematik vi kender i dag, kan udledes fra ZF–aksiomerne.

Et af ZF–aksiomerne siger faktisk, at det er lovligt at definere potensmængden som gjort i (2.9) – helt præcist siger aksiomet at potensmængden virkelig *findes*.

En overgang troede man, at ZF–aksiomerne var tilstrækkelige til at beskrive hele matematikken, men senere viste det sig, at yderligere et aksiom var nødvendigt for en tilfredsstillende beskrivelse, nemlig det såkaldte *udvalgsaksiom*. På engelsk kaldes det for *the Axiom of Choice*, og forkortes derfor AC.

Det fulde aksiomsystem bestående af både ZF–aksiomerne og udvalgsaksiomet AC betegnes ZFC, altså $\mathsf{ZFC} = \mathsf{ZF}+\mathsf{AC}$, og det er i dag det alment accepterede grundlag for matematikken.

(3.3) **Konsistens, fuldstændighed og uafhængighed.** Lad T være et system af aksiomer, fx kunne T være ZF eller ZFC. Vi indfører da sprogbrugen:

(a) Vi kalder T for *konsistent*, hvis det ikke er muligt at udlede en modstrid ud fra aksiomerne i T.
(b) Vi kalder T for *fuldstændigt*, hvis der for ethvert udsagn U gælder, at enten U eller $\neg\mathsf{U}$ (her betegner $\neg\mathsf{U}$ *negationen*, altså det modsatte, af U) kan udledes fra akisomerne i T.
(c) Et udsagn U siges at være *uafhængigt*, eller *uafgørligt*, af T, hvis man hverken kan udlede U eller $\neg\mathsf{U}$ ud fra aksiomerne i T.

Et uafgørligt udsagn er altså i en vis forstand hverken sandt eller falsk, hvis man som grundlag udelukkende arbejder med aksiomsystemet T. Bemærk iøvrigt, at (c) er ækvivalent med, at aksiomsystemerne

$$\mathsf{T}+\mathsf{U} \quad \text{og} \quad \mathsf{T}+(\neg\mathsf{U}),$$

altså T hvor vi tilføjer henholdsvis U og $\neg\mathsf{U}$, begge er konsistente.

At arbejde med et aksiomsystem der ikke er konsistent, er næsten meningsløst. Det bør nævnes, at man desværre *ikke* ved om ZF er konsistent. Man kan dog vise, at ZFC er konsistent såfremt ZF er det; jævnfør paragraf (3.4) nedenfor. ZFs konsistens er altså udelukkende en trossag, men vi bliver styrket i troen, når vi tænker på, at ingen endnu har fundet en modstrid i matematikken, trods mange hundrede års forskning.

I løbet af 1930'erne viser Kurt Gödel, ved metoder udviklet i [10], sine berømte *ufuldstændighedssætninger*, der blandt andet udsiger, at under forudsætning af ZFCs konsistens, er ZFC *ikke* fuldstændigt. Der findes altså udsagn som ikke kan afgøres inden for rammerne af ZFC, altså inden for rammerne af den moderne matematik. Vi skal se på et sådan eksempel i paragraf (4.4).

(3.4) **Zermelos udvalgsaksiom.** Allerede i 1904 indgik udvalgsaksiomet faktisk som ingrediens i Zermelos bevis [20] for den såkaldte *velordningssætning*, formodet af Cantor. På daværende tidspunkt anså Zermelo og hans kollegaer udvalgsaksiomet (der er særdeles intuitivt) for at være en oplagt sand sætning – de havde ikke gjort sig klart, at det faktisk var et *aksiom*, som man var nødt til at antage.

Senere påpegede Émile Borel, at der også gælder det omvendte, nemlig at velordningssætningen kan bruges til at bevise udvalgsaksiomet. Lad os nu formulere indholdet af det vigtige udvalgsaksiom:

UDVALGSAKSIOMET (AC). Hvis $(X_i)_{i\in I}$ er en familie af ikke-tomme delmængder af en mængde X, da findes en afbildning $u\colon I \to X$ opfyldende $u(i) \in X_i$ for ethvert $i \in I$.

Under forudsætning af ZFs konsistens viste Gödel i sit klassiske værk [11–13] fra omkring 1940, at $\mathsf{ZF}+\mathsf{AC}$ er konsistent. I 1963 viste Paul Cohen [5, 6], under samme forudsætning, at også $\mathsf{ZF}+(\neg\mathsf{AC})$ er konsistent. Dette viser, at udvalgsaksiomet er uafhængigt af ZF, hvis sidstnævnte er konsistent.

4. Anvendelser af udvalgsaksiomet

Vi giver nu en række konsekvenser af udvalgsaksiomet – nogle mere overraskende end andre. Vi begynder med det intuitive resultat:

(4.1) **Sætning.** *Lad X og Y være mængder. Da gælder $X \preceq Y$ hvis og kun hvis der findes en surjektiv afbilding $g\colon Y \to X$.*

Bevis. Kun hvis: Antag $X \preceq Y$, dvs. der findes en injektiv afbildning $f\colon X \to Y$. Betragt nu billedet (værdimængden) for f defineret ved:

$$\widetilde{Y} \;=\; \bigl\{y \in Y \bigm| \text{der findes } x \in X \text{ med } y = f(x)\bigr\}.$$

Da f er injektiv opnås en bijektiv afbildning $\widetilde{f}\colon X \to \widetilde{Y}$ ved for $x \in X$ at definere $\widetilde{f}(x) = f(x)$. Lad nu $x_0 \in X$ være vilkårlig. En surjektiv afbildning $g\colon Y \to X$ fås da ved at fastsætte:

$$g(y) \;=\; \begin{cases} \widetilde{f}^{-1}(y) & \text{hvis} \quad y \in \widetilde{Y} \\ x_0 & \text{hvis} \quad y \notin \widetilde{Y} \end{cases} \quad , \quad y \in Y.$$

Hvis: Antag at $g\colon Y \to X$ er surjektiv. For hvert $x \in X$ er originalmængden

$$Y_x \;=\; \bigl\{y \in Y \bigm| g(y) = x\bigr\}$$

altså ikke tom. Anvendes udvalgsaksiomet på familien $(Y_x)_{x\in X}$ af delmængder af Y fås en afbildning $u\colon X \to Y$ således at $u(x) \in Y_x$, altså $g(u(x)) = x$, for alle $x \in X$. Dette tvinger u til at være injektiv (se også Opgave (5.1)(1)), og derfor $X \preceq Y$, som ønsket. □

Nedenfor følger to andre, men væsentligt sværere, anvendelser af udvalgsaksiomet.

(4.2) **Sætning.** *Lad X være en uendelig mængde. Da er produktmængden*

$$X \times X \;=\; \{\, (x, y) \mid x, y \in X\}$$

ækvipotent med X, altså $X \times X \approx X$.

Bevis. Beviset, som overspringes, benytter specialtilfældet $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ fra Eksempel (2.4). Der henvises til fx [1, Sætning 5.4]. □

(4.3) **Sætning.** *For vilkårlige mængder X og Y gælder præcis en af mulighederne:*

$$X \prec Y \quad , \quad Y \prec X \quad \textit{eller} \quad X \approx Y.$$

Bevis. Beviset overspringes, men læseren henvises til fx [15, Sætning 16.II]. □

(4.4) **Cantors kontinuumshypotese.** Vi har i Sætning (2.6) set, at $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Det er derfor naturligt at spørge, om der findes en kardinalitet mellem $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$, med andre ord, findes der en mængde X opfyldende

$$\mathbb{N} \prec X \prec \mathbb{R}\,?$$

Cantor fremsatte i 1877 nedenstående formodning, som går under navnet *kontinuums-hypotesen.* På engelsk kaldes den *the Continuum Hypothesis*, og forkortes derfor CH.

KONTINUUMSHYPOTESEN (CH). Der findes *ingen* mængde X opfyldende $\mathbb{N} \prec X \prec \mathbb{R}$.

Omkring 1940 viste Gödel [11–13], at hvis ZFC er konsistent, da er også ZFC+CH konsistent. I 1963 viste Cohen [5, 6], at hvis ZFC er konsistent, da er også ZFC+(¬CH) konsistent. Under forudsætning af ZFCs konsistens gælder derfor, at kontinuumshypotesen er uafhængig af ZFC.

De konsekvenser af udvalgsaksiomet som er præsenteret ovenfor, vil formentlig ikke stride mod, og måske ligefrem appelere til læserens intuition. En anden konsekvens af udvalgsaksiomet er *Hausdorffs paradoks*; se [18, Theorem 26] eller originalreferencen [14]; som altså slet ikke er et paradoks, men en sætning. Af Hausdorffs paradoks følger nedenstående meget anti-intuitive resultat.

(4.5) **Sætning.** *Betragt i rummet $\mathbb{R}^3$ enhedskugleoverfladen*
$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2=1\big\}$$
Da findes en inddeling af S i ti parvis disjunkte delmængder $A_1,\dots,A_{10}$, altså
$$S = A_1 \cup \ldots \cup A_{10} \qquad \text{og} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \;\text{ hvis }\; i \neq j\,,$$
samt ti andre delmængder $B_1,\dots,B_{10}$ af $\mathbb{R}^3$ opfyldende:

(1) *For hvert i fremkommer mængden B_i ved at rotere og translatere A_i passende.*
(2) *Mængderne $B_1,\dots,B_4$ er parvis disjunkte og $S = B_1 \cup \ldots \cup B_4$.*
(3) *Mængderne $B_5,\dots,B_{10}$ er parvis disjunkte og $S = B_5 \cup \ldots \cup B_{10}$.*

Bevis. Der henvises til [18, Paragraf 11]. □

Sagt med almindelige ord udsiger Sætning (4.5), at kugleoverfladen S kan inddeles i ti disjunkte stykker således, at de fire første stykker kan sættes sammen til den oprindelige kugleoverflade S, og de sidste seks stykker kan sættes sammen til *endnu* en kopi af S. Vi har altså fordoblet kugleoverfladen S!

5. OPGAVER

(5.1) **Opgave.** Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning. Vis at der gælder følgende:

(1) Hvis der findes en (venstreinvers) afbildning $v\colon Y \to X$ opfyldende $(v \circ f)(x) = x$ for alle $x \in X$, da er f injektiv.
(2) Hvis der findes en (højreinvers) afbildning $h\colon Y \to X$ opfyldende $(f \circ h)(y) = y$ for alle $y \in Y$, da er f surjektiv.
(3) Hvis der findes en (invers) afbildning $g\colon Y \to X$ opfyldende $(g \circ f)(x) = x$ og $(f \circ g)(y) = y$ for alle $x \in X$ og $y \in Y$, da er f bijektiv med $f^{-1} = g$.

(*Vink til sidste del af* (3)*:* Hvis $y \in Y$ kan vi skrive $y = f(x)$ for et entydigt bestemt $x \in X$. Konkluder nu at faktisk $g(y) = f^{-1}(y)$.)

(5.2) **Opgave.** Giv et eksempel på en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som hverken er injektiv eller surjektiv.

(5.3) **Opgave.** For hvert naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ defineres mængden $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Vis, at der for vilkårlige $m, n \in \mathbb{N}$ gælder $I_m \preceq I_n$ hvis og kun hvis $m \leqslant n$.

(5.4) **Opgave.** Betragt et lukket interval $[a, b]$ (hvor selvfølgelig $a < b$) i $\mathbb{R}$. Vis at $[a, b]$ er ækvipotent med $[0, 1]$.

(*Vink:* Betragt $f\colon [0,1] \to [a, b]$ defineret ved $f(x) = (b - a)x + a$ for $x \in [0, 1]$.)

(5.5) **Opgave.** For vilkårlige mængder X of Y defineres produktmængden,

$$X \times Y \;=\; \big\{(x, y) \,\big|\, x \in X \text{ og } y \in Y\big\}.$$

Vis, at hvis X, X', Y og Y' er mænger med $X \approx X'$ og $Y \approx Y'$, da vil også

$$X \times Y \;\approx\; X' \times Y'.$$

(5.6) **Opgave.** Giv et bevis for Sætning (2.7).

(5.7) **Opgave.** Vis at der for alle mængder X, Y og Z gælder implikationen:

$$X \prec Y \quad \text{og} \quad Y \preceq Z \quad\Longrightarrow\quad X \prec Z.$$

(*Vink:* brug Bernsteins ækvivalenssætning.)

(5.8) **Opgave.** For mængde X defineres en ny mængde 2^X bestående af samtlige funktioner $f\colon X \to \{0, 1\}$. Vis at 2^X er ækvipotent med $\mathcal{P}(X)$, altså at $2^X \approx \mathcal{P}(X)$.

(*Vink:* Definer en afbildning $\Phi\colon 2^X \to \mathcal{P}(X)$ ved til en funktion $f\colon X \to \{0, 1\}$ i 2^X at lade svare delmængden $\Phi(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ af X.)

(5.9) **Opgave.** Vis at $2^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{R}$; jævnfør Bemærkning (2.11).

(*Vink:* Betragt fx afbildningen $\Psi\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ der til en funktion $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ i $2^{\mathbb{N}}$ lader svare decimalbrøken $\Psi(f) = 0{,}f(1)f(2)f(3)\cdots$ i $\mathbb{R}$.)

Litteratur

1. Christian Berg, *Topologi*, HCØ–tryk, Københavns universitet, 1997.
2. Jørgen Brandt og Knud Nissen, *Q.E.D. – en introduktion til matematisk bevis*, Abacus, 1996.
3. Georg Cantor, *Über eine Eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Journal f. Reine und Angew. Math. **77** (1874), 258–262, (findes også i [4] p. 115–118).
4. ______, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer-Verlag, Berlin, 1980, (genoptryk af 1932 udgaven, med en introduktion af E. Zermelo, og en biografi om Cantor skrevet af A. Fraenkel).
5. Paul Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 1143–1148.
6. ______, *The independence of the continuum hypothesis II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 105–110.
7. Euklid, *Euklids elementer, bog I–XIII*, Gyldendalske Boghandels Forlag (F. Hegel & Søn), København, 1897, oversat af Cand. Mag. Thyra Eibe og med en indledning af Prof., Dr. H. G. Zeuten.
8. Adolf Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor–Zermeloschen Mengenlehre*, Math. Ann. **86** (1922), 230–237.
9. M. Frewer, *Felix Bernstein*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **83** (1981), no. 2, 84–95.
10. Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931), 173–198.
11. ______, *The consistency af the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24** (1938), 556–557.
12. ______, *Consistency-proof for the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **25** (1939), 220–224.
13. ______, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Mathematics Studies, no. 3, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940.
14. Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1949, (dette er et fotografisk genoptryk af førsteudgaven fra 1914, Veit, Leipzig, indeholdende materiale, som blev udeladt fra senere udgaver).
15. Torkil Heide og Hans Jørgen Helms, *Mængdelære og transfinite kardinaltal*, Universitetsforlaget, København, 1964.
16. Lars Mejlbo, *Om det uendelige,* i serien Matematikkens aspekter, Matematiklærerforeningen, 1991, (kan rekvireres ved henvendelse til LMFK sekretariatet, Slotsgade 2, 3. sal, 2200 København N, tlf. 35390064, e-mail: `LMFK@skolekom.dk`).
17. ______, *Uendelighedens paradokser,* i serien Matematikkens aspekter, Matematiklærerforeningen, trykt af Aarhus universitet, 1991, (kan rekvireres ved henvendelse til LMFK sekretariatet, Slotsgade 2, 3. sal, 2200 København N, tlf. 35390064, e-mail: `LMFK@skolekom.dk`).
18. Wacław Sierpiński, *On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition*, Lucknow University Studies, no. xx, The Lucknow University, Lucknow, 1954.
19. Flemming Topsøe, *Introduktion til abstrakt matematik*, HCØ–tryk, Københavns universitet, 1998, (kan hentes elektronisk på `http://www.math.ku.dk/kurser/2003-1/maty/noter.html`).
20. Ernst Zermelo, *Beweis dass jede Menge wohlgeordnet kann*, Math. Ann. **59** (1904), 514–516.
21. ______, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.*, Math. Ann. **65** (1908), 261–281.

Henrik Holm, Matematisk Afdeling, Universitetsparken 5, DK–2100 København Ø, Danmark, Tlf. 35320700, E–mail: `holm@math.ku.dk`