Algebraisk K-teori og lokale Chernkarakterer

anvendt på Serres formodninger om snitmultiplicitet

Specialeforedrag, torsdag den 19. februar

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M, N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M, N).$$

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M,N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M,N).$$

Dette kræver vist en forklaring . . .

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M,N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M,N).$$

En ring er Noethersk, hvis ethvert ideal er endeligt frembragt.

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M,N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M,N).$$

En ring er Noethersk, hvis ethvert ideal er endeligt frembragt, og lokal, hvis den har netop et maksimalideal.

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M,N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M,N).$$

En ring er Noethersk, hvis ethvert ideal er endeligt frembragt, og lokal, hvis den har netop et maksimalideal. En modul er en mængde udstyret med en addition $+$ og en skalarmultiplikation $\cdot$ fra R, som opfører sig "pænt" (svarende til "vektorrum over en ring").

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M, N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M, N).$$

En ring er Noethersk, hvis ethvert ideal er endeligt frembragt, og lokal, hvis den har netop et maksimalideal. En modul er en mængde udstyret med en addition $+$ og en skalarmultiplikation $\cdot$ fra R, som opfører sig "pænt" (svarende til "vektorrum over en ring"). Projektiv dimension, (Krull) dimension og længde er invarianter af moduler.

Snitmultiplicitet

Lad R betegne en kommutativ, lokal, Noethersk ring, og antag at M og N er endeligt frembragte moduler over R med $\mathrm{pd}_R M < \infty$ og $\dim_R(M \otimes_R N) \leq 0$. Da defineres *snitmultipliciteten* af M og N som

$$\chi^R(M,N) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \mathrm{length}_R \mathrm{Tor}_\ell^R(M,N).$$

En ring er Noethersk, hvis ethvert ideal er endeligt frembragt, og lokal, hvis den har netop et maksimalideal. En modul er en mængde udstyret med en addition $+$ og en skalarmultiplikation $\cdot$ fra R, som opfører sig "pænt" (svarende til "vektorrum over en ring"). Projektiv dimension, (Krull) dimension og længde er invarianter af moduler, og tensorproduktet og den ℓ'te Tor-modul for M og N er moduler konstrueret ud fra M og N.

Komplekser

Man bør vel også nævne komplekser: Et kompleks er en familie

$$X = \quad \cdots \longrightarrow X_{\ell+1} \xrightarrow{\partial_{\ell+1}^X} X_\ell \xrightarrow{\partial_\ell^X} X_{\ell-1} \longrightarrow \cdots$$

af moduler X_ℓ og homomorfier ∂_ℓ^X, der opfylder, at $\operatorname{im} \partial_{\ell+1}^X \subseteq \ker \partial_\ell^X$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$.

Komplekser

Man bør vel også nævne komplekser: Et kompleks er en familie

$$X = \quad \cdots \longrightarrow X_{\ell+1} \xrightarrow{\partial_{\ell+1}^X} X_\ell \xrightarrow{\partial_\ell^X} X_{\ell-1} \longrightarrow \cdots$$

af moduler X_ℓ og homomorfier ∂_ℓ^X, der opfylder, at $\operatorname{im}\partial_{\ell+1}^X \subseteq \ker\partial_\ell^X$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$. X kaldes eksakt, hvis $\ker\partial_\ell^X = \operatorname{im}\partial_{\ell+1}^X$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$.

Komplekser

Man bør vel også nævne komplekser: Et kompleks er en familie

$$X = \quad \cdots \longrightarrow X_{\ell+1} \xrightarrow{\partial_{\ell+1}^X} X_\ell \xrightarrow{\partial_\ell^X} X_{\ell-1} \longrightarrow \cdots$$

af moduler X_ℓ og homomorfier ∂_ℓ^X, der opfylder, at $\operatorname{im} \partial_{\ell+1}^X \subseteq \ker \partial_\ell^X$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$. X kaldes eksakt, hvis $\ker \partial_\ell^X = \operatorname{im} \partial_{\ell+1}^X$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$. X er koncentreret i grad $\ell_1, \ldots, \ell_t$, hvis $X_\ell \neq 0$ medfører $\ell \in \{\ell_1, \ldots, \ell_t\}$, og X er begrænset, hvis X er koncentreret i endeligt mange grader.

Komplekser

Man bør vel også nævne komplekser: Et kompleks er en familie

$$X = \quad \cdots \longrightarrow X_{\ell+1} \xrightarrow{\partial^X_{\ell+1}} X_\ell \xrightarrow{\partial^X_\ell} X_{\ell-1} \longrightarrow \cdots$$

af moduler X_ℓ og homomorfier ∂^X_ℓ, der opfylder, at $\operatorname{im}\partial^X_{\ell+1} \subseteq \ker\partial^X_\ell$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$. X kaldes eksakt, hvis $\ker\partial^X_\ell = \operatorname{im}\partial^X_{\ell+1}$ for alle $\ell \in \mathbb{Z}$. X er koncentreret i grad $\ell_1, \ldots, \ell_t$, hvis $X_\ell \neq 0$ medfører $\ell \in \{\ell_1, \ldots, \ell_t\}$, og X er begrænset, hvis X er koncentreret i endeligt mange grader. En morfi $\phi\colon X \to Y$ af komplekser er en familie af homomorfier $\phi_\ell\colon X_\ell \to Y_\ell$, sådan at nedenstående diagram er kommutativt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{\ell+1} \arrow[r, "\partial^X_{\ell+1}"] \arrow[d, "\phi_{\ell+1}"'] & X_\ell \arrow[r, "\partial^X_\ell"] \arrow[d, "\phi_\ell"'] & X_{\ell-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{\ell-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{\ell+1} \arrow[r, "\partial^Y_{\ell+1}"] & Y_\ell \arrow[r, "\partial^Y_\ell"] & Y_{\ell-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Serres formodninger

Antag, at M og N er moduler over R, således at snitmultipliciteten af M og N er defineret.

Serres formodninger

(0) $\dim_R M + \dim_R N \leq \dim R$.

(1) $\chi^R(M, N) = 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N < \dim R$.

(2) $\chi^R(M, N) > 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N = \dim R$.

Serres formodninger

Antag, at M og N er moduler over R, således at snitmultipliciteten af M og N er defineret.

Serres formodninger

(0) $\dim_R M + \dim_R N \leq \dim R$.

(1) $\chi^R(M, N) = 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N < \dim R$.

(2) $\chi^R(M, N) > 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N = \dim R$.

Serres formodninger

Antag, at M og N er moduler over R, således at snitmultipliciteten af M og N er defineret.

Serres formodninger

(0) $\dim_R M + \dim_R N \leq \dim R$.

(1) $\chi^R(M, N) = 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N < \dim R$.

(2) $\chi^R(M, N) > 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N = \dim R$.

Formodning (1) er kendt som "forsvinding".

Serres formodninger

Antag, at M og N er moduler over R, således at snitmultipliciteten af M og N er defineret.

Serres formodninger

(0) $\dim_R M + \dim_R N \leq \dim R$.

(1) $\chi^R(M, N) = 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N < \dim R$.

(2) $\chi^R(M, N) > 0$ såfremt $\dim_R M + \dim_R N = \dim R$.

Formodning (1) er kendt som "forsvinding", og formodning (2) er kendt som "positivitet".

(Faktisk formulerede Serre kun disse formodninger når R er regulær. Formodningerne holder ikke i ovenstående generalitet - det betyder dog ikke, at de ikke kan holde i visse specialtilfælde.)

Hvordan skal man angribe Serres formodninger?

Lad N være en endelig frembragt modul N og lad $\mathcal{C}$ betegne kategorien af moduler, for hvilke $\chi^R(-, N)$ er defineret. Da har "afbildningen" $\chi^R(-, N)\colon \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ to vigtige egenskaber.

(i) $\chi^R(-, N)$ er en "afbildning" ind i en abelsk gruppe.

(ii) $\chi^R(-, N)$ er additiv på kort-eksakte følger, dvs. hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$ er en kort-eksakt følge af moduler i $\mathcal{C}$, så er $\chi^R(B, N) = \chi^R(A, N) + \chi^R(C, N)$.

Hvordan skal man angribe Serres formodninger?

Lad N være en endelig frembragt modul N og lad $\mathcal{C}$ betegne kategorien af moduler, for hvilke $\chi^R(-, N)$ er defineret. Da har "afbildningen" $\chi^R(-, N)\colon \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ to vigtige egenskaber.

(i) $\chi^R(-, N)$ er en "afbildning" ind i en abelsk gruppe.

(ii) $\chi^R(-, N)$ er additiv på kort-eksakte følger, dvs. hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$ er en kort-eksakt følge af moduler i $\mathcal{C}$, så er $\chi^R(B, N) = \chi^R(A, N) + \chi^R(C, N)$.

Hvordan skal man angribe Serres formodninger?

Lad N være en endelig frembragt modul N og lad $\mathcal{C}$ betegne kategorien af moduler, for hvilke $\chi^R(-,N)$ er defineret. Da har "afbildningen" $\chi^R(-,N)\colon \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ to vigtige egenskaber.

(i) $\chi^R(-,N)$ er en "afbildning" ind i en abelsk gruppe.

(ii) $\chi^R(-,N)$ er additiv på kort-eksakte følger, dvs. hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$ er en kort-eksakt følge af moduler i $\mathcal{C}$, så er $\chi^R(B,N) = \chi^R(A,N) + \chi^R(C,N)$.

(Sidstnævnte egenskab indses ved at betragte den lang-eksakte Tor-følge.)

Hvordan skal man angribe Serres formodninger?

Lad N være en endelig frembragt modul N og lad $\mathcal{C}$ betegne kategorien af moduler, for hvilke $\chi^R(-, N)$ er defineret. Da har "afbildningen" $\chi^R(-, N)\colon \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ to vigtige egenskaber.

(i) $\chi^R(-, N)$ er en "afbildning" ind i en abelsk gruppe.

(ii) $\chi^R(-, N)$ er additiv på kort-eksakte følger, dvs. hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$ er en kort-eksakt følge af moduler i $\mathcal{C}$, så er $\chi^R(B, N) = \chi^R(A, N) + \chi^R(C, N)$.

(Sidstnævnte egenskab indses ved at betragte den lang-eksakte Tor-følge.)

Dette leder straks tanken hen på Grothendieck grupper . . .

$$\boxed{\text{Fra nu af betegner } R \text{ en kommutativ ring!}}$$

Grothendieckgrupper

Hvis $\mathcal{C}$ er en fuld delkategori af kategorien $\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f})$ af begrænsede komplekser med endeligt frembragte moduler, så defineres *Grothendieckgruppen* $K_0(\mathcal{C})$ for $\mathcal{C}$ som den abelske gruppe præsenteret ved frembringere $[X]$ for $X \in \mathcal{C}$ og relationer $[X] = 0$, når X er eksakt, og $[Y] = [X] + [Z]$, når der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ i $\mathcal{C}$.

Grothendieckgrupper

Hvis $\mathcal{C}$ er en fuld delkategori af kategorien $\mathcal{C}_{\square}^{R}(\mathsf{f})$ af begrænsede komplekser med endeligt frembragte moduler, så defineres *Grothendieckgruppen* $K_0(\mathcal{C})$ for $\mathcal{C}$ som den abelske gruppe præsenteret ved frembringere $[X]$ for $X \in \mathcal{C}$ og relationer $[X] = 0$, når X er eksakt, og $[Y] = [X] + [Z]$, når der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ i $\mathcal{C}$.

Når $\mathcal{C}$ er tilstrækkelig "pæn", dvs. indeholder nulkomplekset og er stabil over for skift, direkte sum og konstruktion af afbildningskegler,så gælder følgende i $K_0(\mathcal{C})$.

(i) $[0] = 0$.

(ii) $[\Sigma^n X] = (-1)^n [X]$.

Grothendieckgrupper

Hvis $\mathcal{C}$ er en fuld delkategori af kategorien $\mathcal{C}^R_\Box(\mathsf{f})$ af begrænsede komplekser med endeligt frembragte moduler, så defineres *Grothendieckgruppen* $K_0(\mathcal{C})$ for $\mathcal{C}$ som den abelske gruppe præsenteret ved frembringere $[X]$ for $X \in \mathcal{C}$ og relationer $[X] = 0$, når X er eksakt, og $[Y] = [X] + [Z]$, når der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ i $\mathcal{C}$.

Når $\mathcal{C}$ er tilstrækkelig "pæn", dvs. indeholder nulkomplekset og er stabil over for skift, direkte sum og konstruktion af afbildningskegler,så gælder følgende i $K_0(\mathcal{C})$.

(i) $[0] = 0$.

(ii) $[\Sigma^n X] = (-1)^n [X]$.

Grothendieckgrupper

Hvis $\mathcal{C}$ er en fuld delkategori af kategorien $\mathcal{C}_{\square}^{R}(\mathsf{f})$ af begrænsede komplekser med endeligt frembragte moduler, så defineres *Grothendieckgruppen* $K_0(\mathcal{C})$ for $\mathcal{C}$ som den abelske gruppe præsenteret ved frembringere $[X]$ for $X \in \mathcal{C}$ og relationer $[X] = 0$, når X er eksakt, og $[Y] = [X] + [Z]$, når der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ i $\mathcal{C}$.

Når $\mathcal{C}$ er tilstrækkelig "pæn", dvs. indeholder nulkomplekset og er stabil over for skift, direkte sum og konstruktion af afbildningskegler,så gælder følgende i $K_0(\mathcal{C})$.

(i) $[0] = 0$.

(ii) $[\Sigma^n X] = (-1)^n [X]$.

Grothendieckgrupper

Når $\mathcal{C}$ udelukkende består af moduler, bliver "afbildningen" $\pi\colon \mathcal{C} \to K_0(\mathcal{C})$, givet ved $\pi(M) = [M]$, universel blandt "afbildninger" $r\colon \mathcal{C} \to A$, hvor A er en abelsk gruppe, og r er additiv i den forstand, at $r(M) = r(L) + r(N)$, når der er en eksakt følge $0 \to L \to M \to N \to 0$ i $\mathcal{C}$. Det betyder at enhver sådan "afbildning" r kan faktoriseres $r = \bar{r}\pi$, dvs. r faktoriserer gennem $K_0(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\
K_0(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "\bar{r}"'] &
\end{tikzcd}$$

Grothendieckgrupper

Når $\mathcal{C}$ udelukkende består af moduler, bliver "afbildningen" $\pi\colon \mathcal{C} \to K_0(\mathcal{C})$, givet ved $\pi(M) = [M]$, universel blandt "afbildninger" $r\colon \mathcal{C} \to A$, hvor A er en abelsk gruppe, og r er additiv i den forstand, at $r(M) = r(L) + r(N)$, når der er en eksakt følge $0 \to L \to M \to N \to 0$ i $\mathcal{C}$. Det betyder at enhver sådan "afbildning" r kan faktoriseres $r = \bar{r}\pi$, dvs. r faktoriserer gennem $K_0(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ K_0(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

(Sådan er det bare!)

Grothendieckgrupper

Når $\mathcal{C}$ udelukkende består af moduler, bliver "afbildningen" $\pi\colon \mathcal{C} \to K_0(\mathcal{C})$, givet ved $\pi(M) = [M]$, universel blandt "afbildninger" $r\colon \mathcal{C} \to A$, hvor A er en abelsk gruppe, og r er additiv i den forstand, at $r(M) = r(L) + r(N)$, når der er en eksakt følge $0 \to L \to M \to N \to 0$ i $\mathcal{C}$. Det betyder at enhver sådan "afbildning" r kan faktoriseres $r = \bar{r}\pi$, dvs. r faktoriserer gennem $K_0(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ K_0(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

(Sådan er det bare!) En konsekvens af dette er, at $\chi^R(-, N)$ faktoriserer gennem Grothendieckgruppen for enhver kategori af moduler, for hvilke $\chi^R(-, N)$ er defineret.

Grothendieckgrupper

Når $\mathcal{C}$ udelukkende består af moduler, bliver "afbildningen" $\pi\colon \mathcal{C} \to K_0(\mathcal{C})$, givet ved $\pi(M) = [M]$, universel blandt "afbildninger" $r\colon \mathcal{C} \to A$, hvor A er en abelsk gruppe, og r er additiv i den forstand, at $r(M) = r(L) + r(N)$, når der er en eksakt følge $0 \to L \to M \to N \to 0$ i $\mathcal{C}$. Det betyder at enhver sådan "afbildning" r kan faktoriseres $r = \bar{r}\pi$, dvs. r faktoriserer gennem $K_0(\mathcal{C})$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\
K_0(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "\bar{r}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(Sådan er det bare!) En konsekvens af dette er, at $\chi^R(-,N)$ faktoriserer gennem Grothendieckgruppen for enhver kategori af moduler, for hvilke $\chi^R(-,N)$ er defineret.

Det kan vi udnytte (i hvert fald i tilfældene $\dim_R N = 0, 1$)! Her får vi brug for en vigtig sætning . . .

Hovedsætningen

Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, siges en modul at være S-torsion, hvis den er S_ν-torsion for $\nu = 1, \ldots, d$.

Hovedsætningen

Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, siges en modul at være S-torsion, hvis den er S_ν-torsion for $\nu = 1, \ldots, d$.

Hovedsætning Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, så er gruppehomomorfien

$$\iota\colon K_0(\mathcal{C}_d^R(\mathsf{f,P}|S\text{-}\mathsf{tor})) \to K_0(\mathcal{C}_\square^R(\mathsf{f,P}|S\text{-}\mathsf{tor}))$$

givet ved $\iota([X]) = [X]$ en isomorfi.

Hovedsætningen

Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, siges en modul at være S-torsion, hvis den er S_ν-torsion for $\nu = 1, \ldots, d$.

Hovedsætning Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, så er gruppehomomorfien

$$\iota\colon K_0(\mathcal{C}_d^R(\mathsf{f,P}|S\text{-tor})) \to K_0(\mathcal{C}_\square^R(\mathsf{f,P}|S\text{-tor}))$$

givet ved $\iota([X]) = [X]$ en isomorfi.

Her betegner $\mathcal{C}_d^R(\mathsf{f,P}|S\text{-tor})$ kategorien af komplekser, der er koncentrerede i grad $d, \ldots, 0$, har endeligt frembragte projektive moduler og er homologisk S-torsion.

Hovedsætningen

Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, siges en modul at være S-torsion, hvis den er S_ν-torsion for $\nu = 1, \ldots, d$.

Hovedsætning Hvis $S = (S_1, \ldots, S_d)$ er en familie af multiplikative systemer i R, så er gruppehomomorfien

$$\iota\colon K_0(\mathcal{C}_d^R(\mathsf{f{,}P}|S\text{-}\mathsf{tor})) \to K_0(\mathcal{C}_\square^R(\mathsf{f{,}P}|S\text{-}\mathsf{tor}))$$

givet ved $\iota([X]) = [X]$ en isomorfi.

Her betegner $\mathcal{C}_d^R(\mathsf{f{,}P}|S\text{-}\mathsf{tor})$ kategorien af komplekser, der er koncentrerede i grad $d, \ldots, 0$, har endeligt frembragte projektive moduler og er homologisk S-torsion, og $\mathcal{C}_\square^R(\mathsf{f{,}P}|S\text{-}\mathsf{tor})$ betegner kategorien af komplekser, der er begrænsede, har endeligt frembragte projektive moduler og er homologisk S-torsion.

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι.

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$.

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$. Hvis vi kan finde sådan en omskrivning, har vi også en kandidat til ω.

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f{,}P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$. Hvis vi kan finde sådan en omskrivning, har vi også en kandidat til ω.

Vi begynder med at flytte X et passende antal grader mod venstre (for det ændrer jo kun på fortegnet af $[X]$), hvormed vi kan antage, at X er koncentreret i grad $e, \ldots, 0$ for passende $e > 0$.

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$. Hvis vi kan finde sådan en omskrivning, har vi også en kandidat til ω.

Vi begynder med at flytte X et passende antal grader mod venstre (for det ændrer jo kun på fortegnet af $[X]$), hvormed vi kan antage, at X er koncentreret i grad $e, \ldots, 0$ for passende $e > 0$.

Tilbage er nu kun spørgsmålet: Hvordan kan vi "sammenpresse" et kompleks $X \in \mathcal{C}^R_e(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor})$ inden for $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$?

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$. Hvis vi kan finde sådan en omskrivning, har vi også en kandidat til ω.

Vi begynder med at flytte X et passende antal grader mod venstre (for det ændrer jo kun på fortegnet af $[X]$), hvormed vi kan antage, at X er koncentreret i grad $e, \ldots, 0$ for passende $e > 0$.

Tilbage er nu kun spørgsmålet: Hvordan kan vi "sammenpresse" et kompleks $X \in \mathcal{C}^R_e(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor})$ inden for $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$?

Svaret lyder som følger . . .

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$. Hvis vi kan finde sådan en omskrivning, har vi også en kandidat til ω.

Vi begynder med at flytte X et passende antal grader mod venstre (for det ændrer jo kun på fortegnet af $[X]$), hvormed vi kan antage, at X er koncentreret i grad $e, \ldots, 0$ for passende $e > 0$.

Tilbage er nu kun spørgsmålet: Hvordan kan vi "sammenpresse" et kompleks $X \in \mathcal{C}^R_e(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor})$ inden for $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$?

Svaret er: Ved successiv anvendelse af omskrivningen $[X] = [\mathcal{N}] - [\Sigma^{-1}\Delta]$!

Beviset for hovedsætningen

Hovedsætningen bevises ved at finde en invers ω til ι. For et element $[X]$ i $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$ skal altså gælde, at $\iota\omega([X]) = [X]$; specielt kan $[X]$ repræsenteres ved komplekser koncentreret i grad $d, \ldots, 0$. Hvis vi kan finde sådan en omskrivning, har vi også en kandidat til ω.

Vi begynder med at flytte X et passende antal grader mod venstre (for det ændrer jo kun på fortegnet af $[X]$), hvormed vi kan antage, at X er koncentreret i grad $e, \ldots, 0$ for passende $e > 0$.

Tilbage er nu kun spørgsmålet: Hvordan kan vi "sammenpresse" et kompleks $X \in \mathcal{C}^R_e(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor})$ inden for $K_0(\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P}|S\text{-tor}))$?

Svaret er: Ved successiv anvendelse af omskrivningen $[X] = [\mathcal{N}] - [\Sigma^{-1}\Delta]$! Efter ca. 18 siders udregninger ser man, at ω er veldefineret og invers til ι. Dermed er hovedsætningen bevist!

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 0$

Når R er Noethersk og lokal, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 0$, at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f,pd}))$ gælder

$$[M] = \chi^R(M)[R].$$

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 0$

Når R er Noethersk og lokal, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 0$, at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f,pd}))$ gælder

$$[M] = \chi^R(M)[R].$$

Her betegner $\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f,pd})$ kategorien af endeligt frembragte moduler med endelig projektiv dimension.

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 0$

Når R er Noethersk og lokal, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 0$, at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f{,}pd}))$ gælder

$$[M] = \chi^R(M)[R].$$

Her betegner $\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f{,}pd})$ kategorien af endeligt frembragte moduler med endelig projektiv dimension, og $\chi^R(M)$ er Eulerkarakteristikken for M, som er et ikke-negativt heltal med

$$\chi^R(M) > 0 \iff \dim_R M = \dim R.$$

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 0$

Når R er Noethersk og lokal, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 0$, at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f,pd}))$ gælder

$$[M] = \chi^R(M)[R].$$

Her betegner $\mathcal{C}_0^R(\mathsf{f,pd})$ kategorien af endeligt frembragte moduler med endelig projektiv dimension, og $\chi^R(M)$ er Eulerkarakteristikken for M, som er et ikke-negativt heltal med

$$\chi^R(M) > 0 \iff \dim_R M = \dim R.$$

Vi kan nu udregne $\chi^R(M, N)$ når $\dim_R N = 0$ . . .

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 0$

Når R er Noethersk og lokal, og N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 0$, så er $\chi^R(-,N)$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd})$, og for en modul M i denne kategori gælder derfor, at

$$\chi^R(M,N) = \chi^R([M],N)$$

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 0$

Når R er Noethersk og lokal, og N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 0$, så er $\chi^R(-,N)$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd), og for en modul M i denne kategori gælder derfor, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,N) &= \chi^R([M],N)\\ &= \chi^R(\chi^R(M)[R],N)\end{aligned}$$

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 0$

Når R er Noethersk og lokal, og N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 0$, så er $\chi^R(-,N)$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd), og for en modul M i denne kategori gælder derfor, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,N) &= \chi^R([M],N)\\ &= \chi^R(\chi^R(M)[R],N)\\ &= \chi^R(M)\chi^R(R,N)\end{aligned}$$

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 0$

Når R er Noethersk og lokal, og N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 0$, så er $\chi^R(-,N)$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd), og for en modul M i denne kategori gælder derfor, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,N) &= \chi^R([M],N)\\ &= \chi^R(\chi^R(M)[R],N)\\ &= \chi^R(M)\chi^R(R,N)\\ &= \chi^R(M)\operatorname{length}_R N.\end{aligned}$$

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 0$

Når R er Noethersk og lokal, og N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 0$, så er $\chi^R(-,N)$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd), og for en modul M i denne kategori gælder derfor, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,N) &= \chi^R([M],N) \\ &= \chi^R(\chi^R(M)[R],N) \\ &= \chi^R(M)\chi^R(R,N) \\ &= \chi^R(M)\operatorname{length}_R N.\end{aligned}$$

Dermed er Serres formodninger vist i tilfældet $\dim_R N = 0$.

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 0$

Når R er Noethersk og lokal, og N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 0$, så er $\chi^R(-,N)$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd), og for en modul M i denne kategori gælder derfor, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,N) &= \chi^R([M],N)\\ &= \chi^R(\chi^R(M)[R],N)\\ &= \chi^R(M)\chi^R(R,N)\\ &= \chi^R(M)\,\mathrm{length}_R N.\end{aligned}$$

Dermed er Serres formodninger vist i tilfældet $\dim_R N = 0$.

Hvad med når $\dim_R N = 1$?

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 1$

Når R er Noethersk og lokal og S er et multiplikativt system i R med $S \cap \mathrm{Zd}_R = \emptyset$ og sådan at $S^{-1}R$ er generaliseret euklidisk, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 1$ (og noget teori om de første algebraiske K-grupper og lokaliseringsfølgen), at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd},S\text{-tor}))$ gælder

$$[M] = [R/G_R(M)].$$

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 1$

Når R er Noethersk og lokal og S er et multiplikativt system i R med $S \cap \mathrm{Zd}_R = \emptyset$ og sådan at $S^{-1}R$ er generaliseret euklidisk, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 1$ (og noget teori om de første algebraiske K-grupper og lokaliseringsfølgen), at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd,}S\text{-tor}))$ gælder

$$[M] = [R/G_R(M)].$$

Her betegner $\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd,}S\text{-tor})$ kategorien af endeligt frembragte S-torsion moduler med endelig projektiv dimension.

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 1$

Når R er Noethersk og lokal og S er et multiplikativt system i R med $S \cap \mathrm{Zd}_R = \emptyset$ og sådan at $S^{-1}R$ er generaliseret euklidisk, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 1$ (og noget teori om de første algebraiske K-grupper og lokaliseringsfølgen), at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd},S\text{-tor}))$ gælder

$$[M] = [R/G_R(M)].$$

Her betegner $\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd},S\text{-tor})$ kategorien af endeligt frembragte S-torsion moduler med endelig projektiv dimension, og $G_R(M)$ betegner *MacRae-idealet* for M, som er et hovedideal med

$$G_R(M) \neq R \iff \dim_R M = \dim R - 1.$$

Konsekvenser af hovedsætningen når $d = 1$

Når R er Noethersk og lokal og S er et multiplikativt system i R med $S \cap \mathrm{Zd}_R = \emptyset$ og sådan at $S^{-1}R$ er generaliseret euklidisk, følger det af hovedsætningen i tilfældet $d = 1$ (og noget teori om de første algebraiske K-grupper og lokaliseringsfølgen), at der i Grothendieckgruppen $K_0(\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd},S\text{-tor}))$ gælder

$$[M] = [R/G_R(M)].$$

Her betegner $\mathcal{C}_0^R(\text{f,pd},S\text{-tor})$ kategorien af endeligt frembragte S-torsion moduler med endelig projektiv dimension, og $G_R(M)$ betegner *MacRae-idealet* for M, som er et hovedideal med

$$G_R(M) \neq R \iff \dim_R M = \dim R - 1.$$

Vi kan nu udregne $\chi^R(M, N)$ når $\dim_R N = 1$ . . .

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 1$

Antag, at R er Noethersk og lokal, og at N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 1$.

Udregning af $\chi^R(M, N)$ i tilfældet $\dim_R N = 1$

Antag, at R er Noethersk og lokal, og at N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 1$. Det viser sig, at vi kan skrive $\chi^R(M, N)$ som en sum af $\chi^R(M, R/\mathfrak{q})$, hvor $\mathfrak{q}$ er et primideal med $\dim_R R/\mathfrak{q} = 1$.

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 1$

Antag, at R er Noethersk og lokal, og at N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 1$. Det viser sig, at vi kan skrive $\chi^R(M,N)$ som en sum af $\chi^R(M,R/\mathfrak{q})$, hvor $\mathfrak{q}$ er et primideal med $\dim_R R/\mathfrak{q} = 1$. Nu er $\chi^R(-,R/\mathfrak{q})$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd,$(R\backslash\mathfrak{q})$-tor), og da $(R\backslash\mathfrak{q})^{-1}R = R_\mathfrak{q}$ er (semi)lokal, gælder derfor for M tilhørende denne kategori, at

$$\chi^R(M,R/\mathfrak{q}) = \chi^R([M],R/\mathfrak{q})$$

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 1$

Antag, at R er Noethersk og lokal, og at N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 1$. Det viser sig, at vi kan skrive $\chi^R(M,N)$ som en sum af $\chi^R(M,R/\mathfrak{q})$, hvor $\mathfrak{q}$ er et primideal med $\dim_R R/\mathfrak{q} = 1$. Nu er $\chi^R(-,R/\mathfrak{q})$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd,$(R\backslash\mathfrak{q})$-tor), og da $(R\backslash\mathfrak{q})^{-1}R = R_\mathfrak{q}$ er (semi)lokal, gælder derfor for M tilhørende denne kategori, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,R/\mathfrak{q}) &= \chi^R([M],R/\mathfrak{q})\\ &= \chi^R([R/G_R(M)],R/\mathfrak{q})\end{aligned}$$

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 1$

Antag, at R er Noethersk og lokal, og at N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 1$. Det viser sig, at vi kan skrive $\chi^R(M,N)$ som en sum af $\chi^R(M,R/\mathfrak{q})$, hvor $\mathfrak{q}$ er et primideal med $\dim_R R/\mathfrak{q} = 1$. Nu er $\chi^R(-,R/\mathfrak{q})$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd,$(R\backslash\mathfrak{q})$-tor), og da $(R\backslash\mathfrak{q})^{-1}R = R_\mathfrak{q}$ er (semi)lokal, gælder derfor for M tilhørende denne kategori, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M,R/\mathfrak{q}) &= \chi^R([M],R/\mathfrak{q}) \\ &= \chi^R([R/G_R(M)],R/\mathfrak{q}) \\ &= \operatorname{length}_R R/(G_R(M)+\mathfrak{q}).\end{aligned}$$

Sidste lighed følger af, at $\chi^R(R/G_R(M),R/\mathfrak{q})$ er den alternerende sum af længderne af homologierne i $0 \longrightarrow R/\mathfrak{q} \xrightarrow{g} R/\mathfrak{q} \longrightarrow 0$, hvor g er et element, der frembinger $G_R(M)$.

Udregning af $\chi^R(M,N)$ i tilfældet $\dim_R N = 1$

Antag, at R er Noethersk og lokal, og at N er en endeligt frembragt modul med $\dim_R N = 1$. Det viser sig, at vi kan skrive $\chi^R(M,N)$ som en sum af $\chi^R(M, R/\mathfrak{q})$, hvor $\mathfrak{q}$ er et primideal med $\dim_R R/\mathfrak{q} = 1$. Nu er $\chi^R(-, R/\mathfrak{q})$ defineret for alle moduler i $\mathcal{C}_0^R$(f,pd,$(R\backslash\mathfrak{q})$-tor), og da $(R\backslash\mathfrak{q})^{-1}R = R_\mathfrak{q}$ er (semi)lokal, gælder derfor for M tilhørende denne kategori, at

$$\begin{aligned}\chi^R(M, R/\mathfrak{q}) &= \chi^R([M], R/\mathfrak{q}) \\ &= \chi^R([R/G_R(M)], R/\mathfrak{q}) \\ &= \operatorname{length}_R R/(G_R(M) + \mathfrak{q}).\end{aligned}$$

Sidste lighed følger af, at $\chi^R(R/G_R(M), R/\mathfrak{q})$ er den alternerende sum af længderne af homologierne i $0 \longrightarrow R/\mathfrak{q} \xrightarrow{g} R/\mathfrak{q} \longrightarrow 0$, hvor g er et element, der frembinger $G_R(M)$.

Dermed er Serres formodninger vist i tilfældet $\dim_R N = 1$.

Højere dimension

I tilfældet $\dim_R N = 0$ viste vi, at $\chi^R(M,N) = \chi^R(M)\,\mathrm{length}_R N$, og Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R \iff \chi^R(M) \neq 0.$$

Højere dimension

I tilfældet $\dim_R N = 0$ viste vi, at $\chi^R(M,N) = \chi^R(M)\operatorname{length}_R N$, og Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R \iff \chi^R(M) \neq 0.$$

I tilfældet $\dim_R N = 1$ antog vi, at $N = R/\mathfrak{q}$, og vi viste at $\chi^R(M, R/\mathfrak{q}) = \operatorname{length}_R R/(G_R(M) + \mathfrak{q})$, hvorefter Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R - 1 \iff G_R(M) \neq R.$$

Højere dimension

I tilfældet $\dim_R N = 0$ viste vi, at $\chi^R(M,N) = \chi^R(M)\operatorname{length}_R N$, og Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R \iff \chi^R(M) \neq 0.$$

I tilfældet $\dim_R N = 1$ antog vi, at $N = R/\mathfrak{q}$, og vi viste at $\chi^R(M, R/\mathfrak{q}) = \operatorname{length}_R R/(G_R(M) + \mathfrak{q})$, hvorefter Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R - 1 \iff G_R(M) \neq R.$$

Kan vi finde en invariant i stil med $\chi^R(-)$ og $G_R(-)$, der er anvendelig i tilfældet $\dim_R N = 2$?

Højere dimension

I tilfældet $\dim_R N = 0$ viste vi, at $\chi^R(M, N) = \chi^R(M) \operatorname{length}_R N$, og Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R \iff \chi^R(M) \neq 0.$$

I tilfældet $\dim_R N = 1$ antog vi, at $N = R/\mathfrak{q}$, og vi viste at $\chi^R(M, R/\mathfrak{q}) = \operatorname{length}_R R/(G_R(M) + \mathfrak{q})$, hvorefter Serres formodninger fulgte af biimplikationen

$$\dim_R M = \dim R - 1 \iff G_R(M) \neq R.$$

Kan vi finde en invariant i stil med $\chi^R(-)$ og $G_R(-)$, der er anvendelig i tilfældet $\dim_R N = 2$?

Lokale Chernkarakterer kan måske inspirere os . . .

Chowgrupper, Chernkarakterer og Toddklasser

Fra nu af antages R at være Noethersk og lokal med $\dim R = d$.

Chowgrupper, Chernkarakterer og Toddklasser

Fra nu af antages R at være Noethersk og lokal med $\dim R = d$.

Chowgruppen for en afsluttet delmængde $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$ er et $\mathbb{Q}$-vektorrum $A^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} = \coprod_{i=0}^{d} A_i^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}}$.

Chowgrupper, Chernkarakterer og Toddklasser

Fra nu af antages R at være Noethersk og lokal med $\dim R = d$.

Chowgruppen for en afsluttet delmængde $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$ er et $\mathbb{Q}$-vektorrum $A^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} = \coprod_{i=0}^{d} A_i^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}}$.

Den *lokale Chernkarakter* for et kompleks X i $\mathcal{C}_{\square}^{R}(\mathsf{f},\mathsf{P})$ med $\operatorname{Supp}_R X = \mathfrak{X}$ er en familie $\operatorname{ch}^R(X)$ af $\mathbb{Q}$-lineære afbildninger

$$\operatorname{ch}_i^R(X)^{j,\mathfrak{V}} \colon A_j^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} \to A_{j-i}^R(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{X})_{\mathbb{Q}}$$

for alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ og alle afsluttede delmængder $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$.

Chowgrupper, Chernkarakterer og Toddklasser

Fra nu af antages R at være Noethersk og lokal med $\dim R = d$.

Chowgruppen for en afsluttet delmængde $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$ er et $\mathbb{Q}$-vektorrum $A^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} = \coprod_{i=0}^{d} A_i^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}}$.

Den *lokale Chernkarakter* for et kompleks X i $\mathcal{C}_{\square}^{R}(\mathsf{f},\mathsf{P})$ med $\operatorname{Supp}_R X = \mathfrak{X}$ er en familie $\operatorname{ch}^R(X)$ af $\mathbb{Q}$-lineære afbildninger

$$\operatorname{ch}_i^R(X)^{j,\mathfrak{V}}\colon A_j^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} \to A_{j-i}^R(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{X})_{\mathbb{Q}}$$

for alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ og alle afsluttede delmængder $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$.

Toddklassen for et kompleks Y i $\mathcal{C}_{\square}^{R}(\mathsf{f})$ med $\operatorname{Supp}_R Y = \mathfrak{Y}$ er et element $\tau^R(Y) = \tau_0^R(Y) + \cdots + \tau_d^R(Y)$ i $A^R(\mathfrak{Y})_{\mathbb{Q}}$.

Chowgrupper, Chernkarakterer og Toddklasser

Fra nu af antages R at være Noethersk og lokal med $\dim R = d$.

Chowgruppen for en afsluttet delmængde $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$ er et $\mathbb{Q}$-vektorrum $A^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} = \coprod_{i=0}^{d} A_i^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}}$.

Den *lokale Chernkarakter* for et kompleks X i $\mathcal{C}_{\square}^R$(f,P) med $\operatorname{Supp}_R X = \mathfrak{X}$ er en familie $\operatorname{ch}^R(X)$ af $\mathbb{Q}$-lineære afbildninger

$$\operatorname{ch}_i^R(X)^{j,\mathfrak{V}} \colon A_j^R(\mathfrak{V})_{\mathbb{Q}} \to A_{j-i}^R(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{X})_{\mathbb{Q}}$$

for alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ og alle afsluttede delmængder $\mathfrak{V}$ af $\operatorname{Spec} R$.

Toddklassen for et kompleks Y i $\mathcal{C}_{\square}^R$(f) med $\operatorname{Supp}_R Y = \mathfrak{Y}$ er et element $\tau^R(Y) = \tau_0^R(Y) + \cdots + \tau_d^R(Y)$ i $A^R(\mathfrak{Y})_{\mathbb{Q}}$.

Disse har følgende egenskaber . . .

Egenskaber for lokale Chernkarakterer

Man kan addere og multiplicere Chernkarakterer på oplagt måde, og for komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square$(f,P) gælder følgende.

(i) $\mathrm{ch}^R_i(X)\,\mathrm{ch}^R_j(Y) = \mathrm{ch}^R_j(Y)\,\mathrm{ch}^R_i(X)$.

(ii) $\mathrm{ch}^R(Y) = \mathrm{ch}^R(X) + \mathrm{ch}^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(iii) $\mathrm{ch}^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iv) $\mathrm{ch}^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)\,\mathrm{ch}^R(Y)$.

Egenskaber for lokale Chernkarakterer

Man kan addere og multiplicere Chernkarakterer på oplagt måde, og for komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square$(f,P) gælder følgende.

(i) $\mathrm{ch}_i^R(X)\,\mathrm{ch}_j^R(Y) = \mathrm{ch}_j^R(Y)\,\mathrm{ch}_i^R(X)$.

(ii) $\mathrm{ch}^R(Y) = \mathrm{ch}^R(X) + \mathrm{ch}^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(iii) $\mathrm{ch}^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iv) $\mathrm{ch}^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)\,\mathrm{ch}^R(Y)$.

Egenskaber for lokale Chernkarakterer

Man kan addere og multiplicere Chernkarakterer på oplagt måde, og for komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square$(f,P) gælder følgende.

(i) $\mathrm{ch}_i^R(X)\,\mathrm{ch}_j^R(Y) = \mathrm{ch}_j^R(Y)\,\mathrm{ch}_i^R(X)$.

(ii) $\mathrm{ch}^R(Y) = \mathrm{ch}^R(X) + \mathrm{ch}^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(iii) $\mathrm{ch}^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iv) $\mathrm{ch}^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)\,\mathrm{ch}^R(Y)$.

Egenskaber for lokale Chernkarakterer

Man kan addere og multiplicere Chernkarakterer på oplagt måde, og for komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}_{\square}^{R}$(f,P) gælder følgende.

(i) $\mathrm{ch}_i^R(X)\,\mathrm{ch}_j^R(Y) = \mathrm{ch}_j^R(Y)\,\mathrm{ch}_i^R(X)$.

(ii) $\mathrm{ch}^R(Y) = \mathrm{ch}^R(X) + \mathrm{ch}^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(iii) $\mathrm{ch}^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iv) $\mathrm{ch}^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)\,\mathrm{ch}^R(Y)$.

Egenskaber for lokale Chernkarakterer

Man kan addere og multiplicere Chernkarakterer på oplagt måde, og for komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square$(f,P) gælder følgende.

(i) $\mathrm{ch}^R_i(X)\,\mathrm{ch}^R_j(Y) = \mathrm{ch}^R_j(Y)\,\mathrm{ch}^R_i(X)$.

(ii) $\mathrm{ch}^R(Y) = \mathrm{ch}^R(X) + \mathrm{ch}^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(iii) $\mathrm{ch}^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iv) $\mathrm{ch}^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)\,\mathrm{ch}^R(Y)$.

Egenskaber for Toddklasser

For komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}_{\Box}^{R}(\mathsf{f})$ gælder følgende.

(i) $\tau^R(Y) = \tau^R(X) + \tau^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(ii) $\tau^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iii) $\tau^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)(\tau^R(Y))$ såfremt $X \in \mathcal{C}_{\Box}^{R}(\mathsf{f},\mathsf{P})$.

Egenskaber for Toddklasser

For komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f})$ gælder følgende.

(i) $\tau^R(Y) = \tau^R(X) + \tau^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(ii) $\tau^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iii) $\tau^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)(\tau^R(Y))$ såfremt $X \in \mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f,P})$.

Egenskaber for Toddklasser

For komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f})$ gælder følgende.

(i) $\tau^R(Y) = \tau^R(X) + \tau^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(ii) $\tau^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iii) $\tau^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)(\tau^R(Y))$ såfremt $X \in \mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f,P})$.

Egenskaber for Toddklasser

For komplekser X, Y og Z i $\mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f})$ gælder følgende.

(i) $\tau^R(Y) = \tau^R(X) + \tau^R(Z)$ såfremt der er en eksakt følge $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

(ii) $\tau^R(X) = 0$ såfremt X er eksakt.

(iii) $\tau^R(X \otimes_R Y) = \mathrm{ch}^R(X)(\tau^R(Y))$ såfremt $X \in \mathcal{C}^R_\square(\mathsf{f},\mathsf{P})$.

Egenskaben (iii) kaldes den *lokale Riemann–Roch formel*.

Sammenhængen

Da Chowgrupperne er $\mathbb{Q}$-vektorrum er "multiplikation med q" en operation på Chowgrupper for hvert $q \in \mathbb{Q}$. En anden operation på Chowgrupper går under betegnelsen "snit med Rx" og er defineret for hvert $x \in R$.

Sammenhængen

Da Chowgrupperne er $\mathbb{Q}$-vektorrum er "multiplikation med q" en operation på Chowgrupper for hvert $q \in \mathbb{Q}$. En anden operation på Chowgrupper går under betegnelsen "snit med Rx" og er defineret for hvert $x \in R$.

Det viser sig, at hvis M er en endeligt frembragt modul med $\operatorname{pd}_R M < \infty$ og X er en projektiv resolution af M, så er $\operatorname{ch}_0^R(X)$ givet ved multiplikation med $\chi^R(M)$.

Sammenhængen

Da Chowgrupperne er $\mathbb{Q}$-vektorrum er "multiplikation med q" en operation på Chowgrupper for hvert $q \in \mathbb{Q}$. En anden operation på Chowgrupper går under betegnelsen "snit med Rx" og er defineret for hvert $x \in R$.

Det viser sig, at hvis M er en endeligt frembragt modul med $\operatorname{pd}_R M < \infty$ og X er en projektiv resolution af M, så er $\operatorname{ch}_0^R(X)$ givet ved multiplikation med $\chi^R(M)$. Hvis yderligere $\operatorname{Ann}_R M \neq 0$, så er $\operatorname{ch}_1^R(X)$ givet ved snit med $G_R(M)$.

Sammenhængen

Da Chowgrupperne er $\mathbb{Q}$-vektorrum er "multiplikation med q" en operation på Chowgrupper for hvert $q \in \mathbb{Q}$. En anden operation på Chowgrupper går under betegnelsen "snit med Rx" og er defineret for hvert $x \in R$.

Det viser sig, at hvis M er en endeligt frembragt modul med $\mathrm{pd}_R\, M < \infty$ og X er en projektiv resolution af M, så er $\mathrm{ch}_0^R(X)$ givet ved multiplikation med $\chi^R(M)$. Hvis yderligere $\mathrm{Ann}_R\, M \neq 0$, så er $\mathrm{ch}_1^R(X)$ givet ved snit med $G_R(M)$.

Måske kan man finde en ny invariant, der er relateret til $\mathrm{ch}_2^R(X)$!?!

Sammenhængen

Da Chowgrupperne er $\mathbb{Q}$-vektorrum er "multiplikation med q" en operation på Chowgrupper for hvert $q \in \mathbb{Q}$. En anden operation på Chowgrupper går under betegnelsen "snit med Rx" og er defineret for hvert $x \in R$.

Det viser sig, at hvis M er en endeligt frembragt modul med $\operatorname{pd}_R M < \infty$ og X er en projektiv resolution af M, så er $\operatorname{ch}_0^R(X)$ givet ved multiplikation med $\chi^R(M)$. Hvis yderligere $\operatorname{Ann}_R M \neq 0$, så er $\operatorname{ch}_1^R(X)$ givet ved snit med $G_R(M)$.

Måske kan man finde en ny invariant, der er relateret til $\operatorname{ch}_2^R(X)$!?! Og måske kunne man i tilfældet $\dim_R N = 2$ faktorisere $\chi^R(-, N)$ gennem en passende Grothendieckgruppe og ved hjælp af den nye invariant omskrive erstatte M med noget "pænere", således at $\chi^R(M, N)$ kan beregnes og Serres formodninger eftervises i endnu et tilfælde.